ЕКСПЕРТНИ ЗНАНИЯ ПО ФИНАНСИ ЧРЕЗ УЧЕБНОТО СЪДЪРЖАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА И ИТ В УЧИЛИЩЕ

Йорданка Горчева

Институт по математика и информатика при БАН
gorcheva@math.bas.bg

Резюме: *За да разберат учениците значението на показателната функция и сложната лихва в областта на финансите, няколко реални житейски ситуации са формулирани и представени като текстови задачи. Те ангажират учащите се в математическо моделиране и изследователски подход, а аналитичните решения на получените от тях уравнения или неравенства се проверяват и със средствата на ИТ (информационните технологии). Използването на електронни таблици за реални финансови задачи е ценен опит за учениците, приложим и след завършване на училище. Практическият аспект на проблемите ги мотивира да експериментират с различни гледни точки, да сравняват резултатите и да овладяват знания на ниво, близко до експертното. Постановката на задачите отрежда на учениците ролята на финансови консултанти, което за някои от тях може да се превърне в отправна точка за кариерното им развитие. Придобитите знания и умения допринасят учащите се да станат ако не бъдещи финансисти и предприемачи, то поне грамотни потребители на банкови и счетоводни продукти.*

Ключови думи: *Показателна функция; Сложна лихва; Депозити; Електронни таблици*

1. Увод

Бенджамин Франклин (1706-1790) е познат на българските ученици най-вече от уроците по физика – като теоретик в областта на електричеството и велик изобретател. Други са чували за него и в часовете по история – като един от основателите на САЩ, подписали Декларацията за независимостта. Франклин е и собственик на печатница, издател, а предприемаческият му дух го води не само към постигане на лично благосъстояние. Интелектуален принос към обществото за поколения напред са основаните от него Американско философско дружество, Пенсилванският университет, Библиотечната компания на Филаделфия и др. Негова е и фразата „*Времето е пари*“, която е сред най-широко цитираните днес.

Франклин илюстрира и на дело тази своя мисъл, като завещава на градовете Бостън и Филаделфия по 1 000 лири стерлинги [6, с. 194-196]. Волята му е в продължение на сто години след неговата смърт двата града да инвестират дарените им суми при 5% годишен доход *с капитализация*. След този период те трябвало да усвоят по три четвърти от натрупаните средства, а останалата една четвърт – да инвестират при същите условия за следващите сто години.

Франклин не дръзва да наставлява идните поколения по-далеч във времето и предписанията в завещанието му спират дотук. Така двеста години след неговата смърт равносметката от изпълнението на волята му е следната: през 1990-та бордът на гр. Бостън разполага с 4.5 млн. долара, а бордът на гр. Филаделфия – с 2 млн. долара. Разликата в двата баланса е впечатляваща и става обект на анализите на най-опитни финансисти [5].

Наследството на Франклин се превръща в един от най-знаменитите уроци по сложна лихва в историята, с изключителна *обществена* и *образователна* значимост. То показва на широката публика какво могат да направят скромните пет цента годишна лихва на долар, ако в продължение на две столетия бъдат ежегодно прибавяни към главницата и „работят“ заедно с нея.

2. Сложна лихва и математически модел на банков депозит

Финансови ситуации, свързани с *по-обозрими* периоди от човешкия живот, интригуват учениците не по-малко от двувековната сага със завещанието на Франклин. За целта стандартни задачи от учебниците [напр. 4, с. 24-25] могат да им бъдат поднесени така, че да станат близки до техния стил на живот или до проблемите на техните семейства. Ето един начин да се постигне това:

Задача 1. При пенсионирането си г-жа Ваня, доскорошен счетоводител, решила да внесе 10 000 лв. на едногодишен депозит при 6% годишна лихва. Целта й била всяка година на падежа да тегли по 1 200 лв., които да харчи през следващата година по 100 лв. месечно като допълнение към пенсията си.

Г-жа Ваня се чудела колко години ще може да допълва пенсията си по този начин, ако лихвеният процент се запазел същият. Нейният любим внук Иво, единадесетокласник, решил проблема й с наученото по математика. Но като бивш счетоводител г-жа Ваня вярвала повече на Excel, отколкото на формули, поради което Иво съставил и електронна таблица.

Колко години г-жа Ваня би могла да тегли по 1 200 лв. на падежа на такъв депозит?

В часовете по математика българските ученици се запознават със сложната лихва в 6-ти клас [3], а електронни таблици изучават по информационни технологии [1]. Съставянето на електронна таблица за горната задача е по същество математическо моделиране. Приложимостта на тематиката в живота, междупредметните връзки и изследователският подход печелят вниманието и интереса на учениците. Като пестят времето и усилията им за пресмятания, електронните таблици им помагат да проследят разгръщането на ефекта на сложната лихва (*Таблица 1*). Добавянето на допълнителна колона в таблицата прави възможно и сравнението с простата лихва.

В резултат на финансовите операции последният остатък по депозита не винаги съвпада с регулярната сума на теглене. Това е добър повод учениците да заложат някои логически проверки в своята електронна таблица, а също и условно форматиране. В *Таблица 1* например, когато капитализираната сума стане по-малка от 1 200 лв., това е сигнал, че настъпва последното теглене. Съответната числена стойност 1 078.04 лв. става актуалната сума за последното теглене, а съдържанието на клетката се оцветява в червено:

*Таблица 1***.** Решението на **Задача 1** с електронна таблица на Excel

Период (год.)	Главница (лв.)	Лихва 6% (лв.)	Кап. сума (лв.)	Теглене (лв.)	Остатък (лв.)
1	10,000.00	600.00	10,600.00	1,200.00	9,400.00
2	9,400.00	564.00	9,964.00	1,200.00	8,764.00
3	8,764.00	525.84	9,289.84	1,200.00	8,089.84
4	8,089.84	485.39	8,575.23	1,200.00	7,375.23
5	7,375.23	442.51	7,817.74	1,200.00	6,617.74
6	6,617.74	397.06	7,014.81	1,200.00	5,814.81
7	5,814.81	348.89	6,163.70	1,200.00	4,963.70
8	4,963.70	297.82	5,261.52	1,200.00	4,061.52
9	4,061.52	243.69	4,305.21	1,200.00	3,105.21
10	3,105.21	186.31	3,291.52	1,200.00	2,091.52
11	2,091.52	125.49	2,217.01	1,200.00	1,017.01
12	1,017.01	61.02	1,078.04	1,078.04	0.00

Съставянето на електронна таблица представлява интерес и за учениците, решили задачата по аналитичен път, тъй като им дава възможност да *проверят* и *онагледят* решението си. Да допуснем, че със знанията си за геометрична прогресия Иво е получил следния израз за сумата в депозита след *n* периода на олихвяване и теглене, който учениците трябва да проверят:

(1) $$K\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - W\left(\frac{100}{r}\right)\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - 1\right].$$

Тук *K* и *W* са началният капитал и ежегодно теглената сума, *r* – годишният лихвен процент (ГЛП). Тъй като от депозита могат да се теглят средства, докато изразът (1) е неотрицателен, учениците получават неравенството:

(2) $$\left(1+\frac{r}{100}\right)^n \left[W\left(\frac{100}{r}\right) - K\right] \le W\left(\frac{100}{r}\right).$$

Ако $W\left(\frac{100}{r}\right)-K>0,$ т.е. $W>K\left(\frac{r}{100}\right),$ неравенство (2) приема вида

$$\left(1+\frac{r}{100}\right)^n \le \frac{W\left(\frac{100}{r}\right)}{W\left(\frac{100}{r}\right)-K}.$$

Следователно броят *n* на периодите удовлетворява неравенството:

(3)
$$n \le \frac{\log\left[\dfrac{W\left(\frac{100}{r}\right)}{W\left(\frac{100}{r}\right)-K}\right]}{\log\left(1+\dfrac{r}{100}\right)}.$$

След като заместят *K* = 10 000, *W* = 1 200 и *r* = 6 в (3), учениците получават, че $n \le 11.8955.$ Като интерпретират резултата си, те заключават, че в продължение на 11 години г-жа Ваня ще може да тегли по 1 200 лв. на падеж, а на 12-та година сума, която ще й стигне за 0.8955 части от годината (т.е. за 10.74 месеца). Учениците определят и размера на последното теглене: 0.8955 част от 1 200 лв., т.е. 1 074.60 лв. Сравнението с *Таблица 1* показва удовлетворителността на резултата им за конкретния случай. Така електронната таблица верифицира математическия модел и му придава завършеност с предлаганата визуализация.

3. Математическа интуиция и избор на банков депозит

Финансовите задачи са не само средство за развиване на критичното мислене и анализаторските способности на учениците, но и на тяхната математическа интуиция. Това са важни елементи на подготвеността им за живота и бъдещата професия, с която те „излизат“ от средното училище. Следващата задача илюстрира как „очевидното“ в математиката може да бъде подвеждащо, а в дългосрочен финансов план – дори губещо. Сюжетът е продължение на вече започналата история между двамата герои г-жа Ваня и нейния внук:

Задача 2. Междувременно г-жа Ваня проучила още възможности за своите спестявания. На другия ден тя намерила банка, която предлагала 6% ГЛП по едномесечните депозити с капитализация. Перспективата да внесе 10-те хил. лв. на такъв депозит, като тегли по 100 лв. месечно на падеж тя преценила като по-изгодна и помолила своя внук Иво да замести новите числови данни в електронната таблица.

Дали пресмятанията на Иво са потвърдили предположението на г-жа Ваня?

От математическа гледна точка **Задача 2** не се различава принципно от предишната и повечето ученици я възприемат като упражнение в превръщане на мерни единици. Според тях, тъй като депозитът е едномесечен, е достатъчно да изразят годишния лихвен процент (ГЛП) на месечна база: *r* = 0.5. Заместването на числовите данни *K* = 10 000, *W* = 100 и *r* = 0.5 в (3) води до решение от типа неравенство: $n \leq 138.9796$, където *n* е броят на месечните периоди.

Шестокласниците, които по програма *не изучават* логаритми, могат да решат задачата с електронна таблица. Фактът, че тя се оказва значително по-дълга от предишната, само оправдава необходимостта от използването й (*Таблица 2*):

Таблица 2. Решението на **Задача 2** с електронна таблица на Excel

Период (мес.)	Главница (лв.)	Лихва 6% (0.5% мес.)	Кап. сума (лв.)	Теглене (лв.)	Остатък (лв.)
1	10,000.00	50.00	10,050.00	100.00	9,950.00
2	9,950.00	49.75	9,999.75	100.00	9,899.75
3	9,899.75	49.50	9,949.25	100.00	9,849.25
4	9,849.25	49.25	9,898.49	100.00	9,798.49
5	9,798.49	48.99	9,847.49	100.00	9,747.49
6	9,747.49	48.74	9,796.22	100.00	9,696.22
7	9,696.22	48.48	9,744.71	100.00	9,644.71
. . .					
135	490.22	2.45	492.68	100.00	392.68
136	392.68	1.96	394.64	100.00	294.64
137	294.64	1.47	296.11	100.00	196.11
138	196.11	0.98	197.09	100.00	97.09
139	97.09	0.49	97.58	97.58	0.00

Основният образователен акцент на **Задача 2** обаче е в предлагането на една почти идентична финансова ситуация, за която се твърди, че е по-добра от разгледаната в **Задача 1**. От учениците се очаква да преценят дали това е така и да препоръчат по-добрия за клиента вариант. *Таблица 1* показва, че ежегодните тегления до изчерпване на депозита ще осигурят на г-жа Ваня допълнителни средства в продължение на 11 пълни години и за още $\frac{1078.04}{1200}$ част от една година. Това са по 100 лв. месечно за 142 цели месеца плюс 78.04 лв. за 143-я. Според *Таблица 2*, при едномесечен депозит тегленето по 100 лв. всеки месец ще бъде възможно в продължение на 138 цели месеца плюс 97.58 лева за 139-я. Следователно *вариантът с едногодишния депозит* е по-добър за клиента.

4. *Перпетуум мобиле* и банков депозит

В „Психология на алгебрата“ американският психолог Едуард Торндайк (1874-1949) подкрепя идеята текстовите задачи да пресъздават реални житейски ситуации с думите: „*В училище се решават задачи, за да се решават задачите в живота*“ ([7], с. 154). Следващите задачи в предлаганата тук поредица показват прогрес във финансовата грамотност на героите г-жа Ваня и внука ѝ Иво и подсказват на учащите се, че нарастваща компетентност се очаква и от тях:

Задача 3. Очарована от математическите разсъждения на внука си, г-жа Ваня се обърнала към него за нов съвет: ако банката запази неограничено дълго 6%-я ГЛП по едногодишните депозити, каква сума на ежегодните тегления ще ѝ препоръча Иво, за да може тя също неограничено дълго да тегли от депозираните 10 000 лв.

Какъв съвет би дал Иво на любимата си баба?

Учениците, които въз основа на израза (1) са моделирали вече две финансови ситуации, виждат приложимостта му и в този случай: г-жа Ваня ще може да тегли пари от депозита си дотогава, докато (1) приема неотрицателни стойности. За да продължи този процес неограничено дълго във времето, неравенството (2) трябва да бъде изпълнено за всяко *n.* Решавайки го относно *W,* учениците получават:

(4)
$$W \le \frac{K\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}{\left(\frac{100}{r}\right)\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - 1\right]}.$$

В единадесети клас свойствата на показателната функция са вече познати, както и граници на числови редици. След като представят (4) във вида

(5)
$$W \le \frac{K\left(\frac{r}{100}\right)}{1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}}$$

и извършат граничен преход при $n \to \infty$, учениците получават следната оценка за размера на тегленията:

(6)
$$W \le K\left(\frac{r}{100}\right).$$

За K = 10 000 и r = 6 стойността на горната граница в дясната страна на (6) е 600. Следователно всички тегления, не надвишаващи 600 лв., са допустими.

За учениците това заключение означава наличие на повече от едно решение и те анализират с електронна таблица случая, в който Иво би препоръчал на баба си да тегли ежегодно на падежа примерно по 300 лв. (*Таблица 3*):

Таблица 3. Анализ на едно възможно решение на **Задача 3** с Excel

Период (год.)	**Главница (лв.)**	**Лихва 6% (лв.)**	**Кап. сума (лв.)**	**Теглене (лв.)**	**Остатък (лв.)**
1	**10,000.00**	**600.00**	**10,600.00**	**300**	**10,300.00**
2	**10,300.00**	**618.00**	**10,918.00**	**300**	**10,618.00**
3	**10,618.00**	**637.08**	**11,255.08**	**300**	**10,955.08**
4	**10,955.08**	**657.30**	**11,612.38**	**300**	**11,312.38**
5	**11,312.38**	**678.74**	**11,991.13**	**300**	**11,691.13**
6	**11,691.13**	**701.47**	**12,392.60**	**300**	**12,092.60**
7	**12,092.60**	**725.56**	**12,818.15**	**300**	**12,518.15**
8	**12,518.15**	**751.09**	**13,269.24**	**300**	**12,969.24**
9	**12,969.24**	**778.15**	**13,747.39**	**300**	**13,447.39**
10	**13,447.39**	**806.84**	**14,254.24**	**300**	**13,954.24**
11	**13,954.24**	**837.25**	**14,791.49**	**300**	**14,491.49**
12	**14,491.49**	**869.49**	**15,360.98**	**300**	**15,060.98**
. . .					

Предложеното решение обаче едва ли би харесало на г-жа Ваня, тъй като й осигурява само по 25 лв. допълнително на месец. Опитното й око на счетоводител би доловило, че въпреки периодичните тегления остатъкът по депозита й *нараства* с времето. Като пенсионер, лично тя би предпочела *не да увеличава*, а *да ползва* спестяванията си в най-голяма степен. Затова едно друго решение – за ежегодни тегления по 500 лв. – би било по-приемливо за г-жа Ваня, тъй като означава тя да разполага с по 41.67 лв. допълнително на месец. За нея по-удовлетворителен ще бъде и остатъкът в депозита й, който след 12 години ще възлиза на 11 686.99 лв., а не на 15 060.98 лв.

Забелязали, че редицата от остатъците в депозита расте по-бавно, щом тегленията се увеличат от 300 на 500 лв., учениците проверяват с електронна таблица случая, когато се тегли максималната сума (*Таблица 4*). За част от единадесетокласниците резултатът е изненадващ. Те разбират, че са могли да намерят най-доброто от гледна точка на потребителя решение и без извършването на граничен преход. Шестокласниците също могат да съобразят, че ежегодното теглене на суми от депозита за безкрайно дълъг период от време е напълно възможно, стига това да става на падеж и сумите да *не надвишават* начислената за годината лихва. При такъв размер на тегленията депозитът се превръща в *перпетуум мобиле* (на лат. *вечен двигател*) за допълнителен доход към пенсията на г-жа Ваня, а решението демонстрира на учениците принципите, заложени в управлението на множество пенсионни, наградни, благотворителни фондове и пр. с цел регулярното изплащане на пенсии, пожизнени ренти, Нобелови награди и други.

Таблица 4. Най-добро за конкретния потребител решение на **Задача 3.**

Период (год.)	Главница (лв.)	Лихва 6% (лв.)	Кап. сума (лв.)	Теглене (лв.)	Остатък (лв.)
1	10,000.00	600.00	10,600.00	600	10,000.00
2	10,000.00	600.00	10,600.00	600	10,000.00
3	10,000.00	600.00	10,600.00	600	10,000.00
4	10,000.00	600.00	10,600.00	600	10,000.00
5	10,000.00	600.00	10,600.00	600	10,000.00
. . .					

5. Същата идея с други думи

Важна особеност на финансовите задачи е необходимостта от вместване на решението в определени финансови рамки. В тази светлина е представена следващата ситуация:

Задача 4. Притеснена, че сумата от 600 лв. годишно няма да ѝ бъде достатъчна, г-жа Ваня се амбицирала да проучи предложенията и на други банки. За да знае каква оферта да търси, тя пак се обърнала към Иво. Този път формулирала въпроса си така: какъв ГЛП (годишен лихвен процент) по нейния едногодишен депозит от 10 000 лева би ѝ обезпечил ежегодно теглене от 1 200 лв. за неограничен период от време при положение, че този лихвен процент остава непроменен.

Какъв е отговорът на този въпрос?

С досетливост или въз основа на придобития опит учениците заключават, че след изтичането на поредния едногодишен период г-жа Ваня трябва да изтегли цялата начислена лихва и да остави за следващия период само началния капитал. За да бъде желаното от нея ежегодно теглене W = 1 200 лв. равно на годишната лихва, начислявана върху капитала K = 10 000 лв., лихвеният процент трябва да има стойност r = 12. Намирането на това решение не изисква електронна таблица, но използването ѝ убедително го онагледява.

Въпреки че решението r = 12 е математически вярно, като информиран потребител г-жа Ваня би го отхвърлила с аргумента, че в момента за банките в страната *не е обичайно* да предлагат 12% годишна лихва по депозити. За пореден път обаче проблемът ѝ може да бъде преформулиран и решен по друг начин:

Задача 5. Каква сума трябва да внесе г-жа Ваня на едногодишен депозит при 6% ГЛП, за да може всяка година на падежа да тегли по 1 200 лв. за неограничен период от време, при положение, че ГЛП остане непроменен също за неограничен период от време?

Тъй като 1 200 лв. са 6% от 20 000 лв., то начален капитал в размер K = 20 000 лв. ще осигури на г-жа Ваня ежегодни тегления от 1 200 лв. за неограничено дълго време, стига ГЛП в размер на 6% да бъде запазен за неограничено дълго време.

6. Заключения

Създадената поредица от текстови задачи предлага на учениците поглед към различни финансови ситуации. Тяхната подробна формулировка е необичайна за стандартните задачи в учебниците, но стимулира вниманието им към детайлите и практическото прилагане на знанията. Работата на учащите се върху тях е едно навлизане в света на възрастните чрез света на математиката и ИТ. Ето защо мястото им в математическото и финансовото образование може да се определи с думите на Андре Туум, експерт по алгоритми, клетъчни автомати, вероятности и статистика: „*между детството и математиката*“ [8]

Ако най-важната черта на настоящата поредица от задачи е приложният им характер, то не по-малко достойнство е и тяхната достъпност: те могат да бъдат решавани от различни по възраст и математическа подготовка ученици с предпочитаните от тях средства: математическо моделиране, електронни таблици или дори само с елементарна аритметика. Това ги прави средство за развиване на математическата, технологична и финансова грамотност на учащите се и за овладяване на финансови знания, близки до експертните, което би ориентирало и преподавателите им към специализираната литература [2].

Формулировката на предлаганите задачи насочва учениците да използват електронни таблици и в случаите, когато са получили решението по аналитичен път. Те им дават възможност да симулират и проследяват финансовите процеси и експериментирайки, да опознават ефекта на сложната лихва. Казано с думите на американския математик и класик в компютърните науки Ричард Хеминг (1915-1998), „*Целта на изчисленията са не числата, а прозренията*“.

Анализът на конкретни финансови ситуации, търсенето и предлагането на решения, изборът между няколко решения поставя учениците в активната роля на финансови консултанти. За някои от тях това може да се окаже началото на професионалната им подготовка в областта на финансите като бъдещи банкери, счетоводители, предприемачи или мениджъри, каквито са идеите на Европейския проект *mascil* – математика и наука за живота[1].

Литература

[1] Добрева, М. и колектив. *Уча и творя с компютър. Информационни технологии за 6-ти клас. Задължителна подготовка*. София: Анубис. 2007.

[2] Кюркчиев, Н. *Избрани глави от приложната финансова математика.* София: Академично издателство „Проф. Марин Дринов“. 2012.

[3] Лозанов, Ч., Витанов, Т. & Калчева, А. *Математика за 6-ти клас.* София: Анубис. 2005.

[4] Лозанов, Ч., Витанов, Т. & Недевски, П. *Математика за 11-ти клас. Задължителна подготовка*. София: Анубис. 2005.

[5] Butterfield, F. From Ben Franklin, a gift that's worth two fights. *The New York Times* 1990-04-21, http://www.nytimes.com (последен достъп 20 април 2014)

[6] Franklin, B. & Duane, W. *Memoirs of Benjamin Franklin*. Volume I. Philadelphia, PA: McCarty & Davis. 1840.

[7] Thorndike, E. L. et al. *The psychology of algebra.* New York, NY: Macmillan Company. 1926.

[8] Toom, A. Between childhood and mathematics: Word problems in mathematics education. *Humanistic mathematics network journal*. 1999, 20, pp. 25-32 and 44.

Бележки

[1] mascil: mathematics and science for life. http://www.mascil-project.eu/ (последен достъп 20 април 2014)

DEVELOPING FINANCIAL EXPERTISE THROUGH MATHEMATICS AND IT SCHOOL CURRICULA

Iordanka Gortcheva

Institute of Mathematics and Informatics at the Bulgarian Academy of Sciences
1113 Sofia, Bulgaria, Acad. G. Bonchev Str., Block 8
e-mail: gorcheva@math.bas.bg

Abstract: *To illustrate the importance of compound interest in finances to middle and high school students, real-life situations are formulated as mathematical word problems. Such approach involves the whole class in inquiry based learning and thus mathematical modeling comes to use. The answers are found analytically by solving equations or inequalities and then checked by means of information technologies. The use of spreadsheets to mimic financial situations provides valuable experience to middle and high school students, which is also applicable later on in life. The practical aspects of the word problems motivate them to comprehend the idea of compound interest and gain near-expert financial knowledge. The search for solutions gives them the role of financial advisors and for many this could be a starting point to a future career. The acquired knowledge aids students in becoming literate users of accounting and banking products, if not future financiers or entrepreneurs.*